**math.e**

***Hrvatski matematički elektronički časopis***

# Riemannova, Darbouxova i Cauchyjeva integrabilnost

**Cauchyjeva integrabilnost** **Darbouxova suma** **Riemannov inegral**

Ozren Perše, Mila Strpić, Sanja Strpić

**Sažetak**

U ovom preglednom radu prezentiramo dokaz iz S. Schneider, International Mathematical Forum 9 (2014) da se Riemannova i Cauchyjeva definicija integrabilnosti podudaraju. Također, diskutiramo odnos Riemannove i Darbouxove integrabilnosti.

## 1 Uvod

Standardni udžbenici (vidi npr. [3], [4], [5]) i kolegiji matematičke analize uvode pojam određenog integrala ograničene funkcije $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ pomoću gornjih i donjih Darbouxovih suma pridruženih proizvoljnoj razdiobi $\rho=\{x_k\}_{k=0}^n$ segmenta $[a,b]$. Razlog tome je što je ta definicija ipak na neki način operativnija od originalne Riemannove definicije pomoću integralnih (tj. Riemannovih) suma, za čiju definiciju je potrebno osim razdiobe $\rho$ fiksirati i po jednu točku $x_k^*\in[x_{k-1},x_k]$ iz svakog intervala pridruženog toj razdiobi. Riemannovu definiciju možemo ugrubo zapisati:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\|\rho\|\to 0}\Big(\sum_{k=1}^n f(x_k^*)(x_k-x_{k-1})\Big), \qquad (1)$$

ako taj limes postoji, pri čemu je s $\|\rho\|$ označen dijametar razdiobe $\rho$. Jedna prednost ove definicije je što ne zahtijeva pretpostavku da je $f$ ograničena funkcija. Naime, lagano se može pokazati da postojanje limesa u relaciji (1) povlači da je $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ograničena.

Prirodno pitanje koje se postavlja je: Koliko možemo pojednostaviti definiciju (1) obzirom na izbor točaka $x_k^*\in[x_{k-1},x_k]$? Kao prirodni kandidati se javljaju rubovi intervala $x_k^*=x_{k-1}$ ili $x_k^*=x_k$. Takvim razmišljanjem dolazimo do pojma Cauchyjevog integrala:

$$\lim_{\|\rho\|\to 0}\Big(\sum_{k=1}^n f(x_k)(x_k-x_{k-1})\Big), \qquad (2)$$

gdje smo uzeli $x_k^*=x_k$. Dakle, i pojam Cauchy-integrabilne funkcije je moguće definirati bez pretpostavke ograničenosti funkcije $f$. Međutim, za razliku od Riemannovog integrala, postojanje limesa u relaciji (2) ne povlači nužno ograničenost funkcije $f$ (vidi Primjedbu

6).

Stoga dolazimo do formulacije glavnog problema ovog rada: Za ograničenu funkciju $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, jesu li Riemannova i Cauchyjeva definicija integrala ekvivalentne? Budući da je jedan smjer očit, zapravo je potrebno dokazati da je svaka ograničena Cauchy-integrabilna funkcija ujedno i Riemann-integrabilna. Prvi dokaz te činjenice je dao D. C. Gillespie ([2]), koristeći teoriju mjere. U ovom radu prezentiramo nedavni dokaz S. Schneidera ([7]), koji koristi samo elementarne činjenice o Riemannovom integralu, odnosno taj dokaz je prilagođen slušačima standardnog kolegija realne analize funkcija jedne varijable.

U ovom radu, za ograničenu funkciju $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, sa $\sup(f, [a, b])$ označavamo supremum funkcije $f$ na segmentu $[a, b]$, te s $\inf(f, [a, b])$ pripadni infimum.

## 2 Riemannov i Darbouxov integral

Započinjemo sa standardnom definicijom određenog integrala, kojeg u ovom radu nazivamo Darbouxov integral.

Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ograničena funkcija. Neka je

$$\rho = \{x_k\}_{k=0}^n = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$$

razdioba segmenta $[a, b]$. Označimo s

$$\|\rho\| := \max\{x_k - x_{k-1} \ : \ 1 \leq k \leq n\}$$

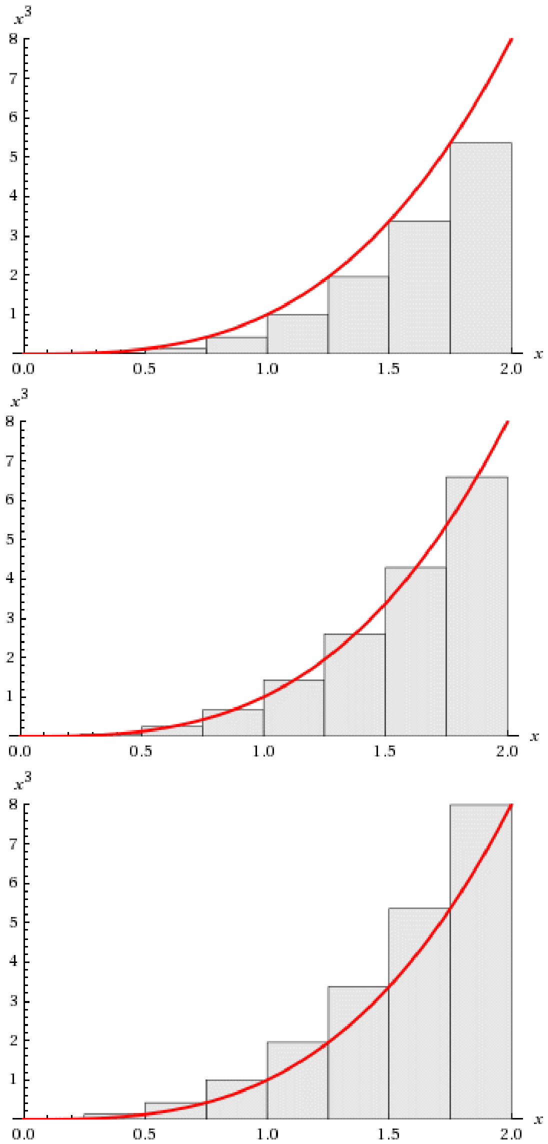
*dijametar* razdiobe $\rho$. Nadalje, označimo sa

$$\begin{aligned} S(f, \rho) &:= \sum_{k=1}^{n} (\sup(f, [x_{k-1}, x_k])) \cdot (x_k - x_{k-1}), \\ s(f, \rho) &:= \sum_{k=1}^{n} (\inf(f, [x_{k-1}, x_k])) \cdot (x_k - x_{k-1}) \end{aligned}$$

gornju i donju Darbouxovu sumu za funkciju $f$ obzirom na razdiobu $\rho$, te s

$$\begin{aligned} I^*(f) &:= \inf\{S(f, \rho) \ : \ \rho \text{ je razdioba od } [a, b]\}, \\ I_*(f) &:= \sup\{s(f, \rho) \ : \ \rho \text{ je razdioba od } [a, b]\} \end{aligned}$$

gornji i donji Darbouxov integral od $f$ na $[a, b]$.




*Donja Darbouxova suma, Riemannova suma i gornja Darbouxova suma*

**Definicija 1.** Kažemo da je ograničena funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *Darboux-integrabilna* ako je $I^*(f) = I_*(f)$. U tom slučaju taj integral označavamo s $\int_a^b f(x)\, dx$.

Neka je sada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ proizvoljna funkcija (ne nužno ograničena). Neka je $\rho = \{x_k\}_{k=0}^n$ razdioba segmenta $[a, b]$, te $x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$ proizvoljne točke, koje u ovom radu zovemo *probne točke*. Nadalje, označimo s

$$R(f, \rho, \{x_k^*\}) \ := \ \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)(x_k - x_{k-1})$$

Riemannovu (ili integralnu) sumu od $f$ obzirom na razdiobu $\rho = \{x_k\}_{k=0}^n$ od $[a, b]$ i probne točke $x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$.

**Definicija 2.** Kažemo da je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *Riemann-integrabilna* ako postoji $I \in \mathbb{R}$ takav da za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za sve razdiobe $\rho = \{x_k\}_{k=0}^n$ od $[a, b]$ s dijametrom $\|\rho\| < \delta$ i za sve izbore $\{x_k^*\}$ probnih točaka obzirom na $\rho$, vrijedi

$$|R(f, \rho, \{x_k^*\}) - I| < \epsilon.$$

Sljedeći rezultat je vjerojatno dobro poznat čitatelju (vidi npr. [6], Poglavlje 10, gdje autori prezentiraju dokaz u slučaju funkcije dvije varijable):

**Teorem 3.** *Vrijedi:*

*[(i)] Svaka Riemann-integrabilna funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je nužno ograničena.*

*[(ii)] Ograničena funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je Darboux-integrabilna ako i samo ako je Riemann-integrabilna. Uz oznake kao u Definiciji 2 je $I = \int_a^b f(x)\,dx$.*

Dakle, Darbouxova integrabilnost i Riemannova integrabilnost su u suštini ekvivalentne.

## 3 Riemannov i Cauchyjev integral

Pojam Cauchyjeve integrabilnosti dobivamo određenim pojednostavljenjem Riemannove integrabilnosti.

Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ proizvoljna funkcija (ne nužno ograničena). Neka je $\rho = \{x_k\}_{k=0}^n$ razdioba segmenta $[a, b]$. Označimo s $C(f, \rho)$ Riemannovu sumu koja za probne točke u svakom podintervalu uzima desne rubove $x_k^* = x_k$. Dakle,

$$C(f, \rho) \ := \ \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Modifikacijom Definicije 2 dobivamo:

**Definicija 4.** Kažemo da je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *Cauchy-integrabilna* ako postoji $L \in \mathbb{R}$ takav da za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za sve razdiobe $\rho = \{x_k\}_{k=0}^n$ od $[a, b]$ s dijametrom $\|\rho\| < \delta$, vrijedi

$$|C(f, \rho) - L| < \epsilon.$$

*Opaska* 5. Originalna Cauchyjeva definicija iz [1] uzima za probne točke lijeve rubove intervala $x_k^* = x_{k-1}$. Prijelaz s lijevih na desne rubove intervala se očito može ostvariti promatranjem funkcije $g(x) = f(-x)$.

*Opaska* 6. Postoje neograničene funkcije koje su Cauchy-integrabilne. Na primjer, funkcija $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definirana s

$$f(x) = \begin{cases} x^{-1/2}, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

je Cauchy-integrabilna iako je neograničena. Dakle, $f$ nije Riemann-integrabilna (vidi Primjedbu 10).

Očito je svaka Riemann-integrabilna funkcija ujedno i Cauchy-integrabilna. Cilj ovog rada je dokazati da uz pretpostavku da je $f$

ograničena, vrijedi i obrat te tvrdnje. Ključnu ulogu u dokazu te činjenice ima sljedeća tehnička lema:

**Lemma 7.** *Ako je* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *ograničena, tada za svaki* $\epsilon > 0$ *postoji razdioba* $\rho$ *od* $[a, b]$ *takva da je*

$$S(f, \rho) - C(f, \rho) < \epsilon.$$

*Dokaz.* Fiksirajmo $B > 0$ takav da je $\sup(f, [a, b]) - \inf(f, [a, b]) \leq B$, i neka je $\epsilon > 0$. Definirajmo $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ s $g(x) = \sup(f, [x, b])$. Tada je $g$ očito padajuća pa je i Riemann-integrabilna na $[a, b]$. Označimo vrijednost tog integrala s $L$, dakle $L = \int_a^b g(x)\,dx$. Fiksirajmo $\delta_1 > 0$ takav da za svaku razdiobu $\rho'$ od $[a, b]$ sa svojstvom $\|\rho'\| < \delta_1$ i za svaki izbor $x_k^*$ probnih točaka obzirom na $\rho'$, vrijedi $|R(g, \rho', \{x_k^*\}) - L| < \epsilon$. Neka je $\delta_2 = \frac{\epsilon}{B}$, i označimo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Neka je $\rho'' = \{x_k\}_{k=0}^n$ razdioba od $[a, b]$ takva da je $\|\rho''\| < \frac{\delta}{2}$. Želimo pomoću $\rho''$ dobiti željenu razdiobu $\rho$. Neka je

$$\begin{aligned} C &= \{1 \leq k \leq n \ : \ g(x_{k-1}) = g(x_k)\}; \\ D &= \{1 \leq k \leq n \ : \ g(x_{k-1}) > g(x_k)\}; \\ D' &= \{k \in D \setminus \{n\} \ : \ k + 1 \notin D\}. \end{aligned}$$

Za svaki $k \in D'$ neka je $z_k = \inf\{x \in [x_{k-1}, x_k] \ : \ g(x) = g(x_k)\}$. Neka je

$$\begin{aligned} D'_0 &= \{k \in D' \ : \ g(z_k) = g(x_k)\}; \\ D'_1 &= \{k \in D' \ : \ g(z_k) > g(x_k)\}. \end{aligned}$$

Za svaki $k \in D$, izaberimo $y_k \in [x_{k-1}, x_k)$ takav da je $|f(y_k) - g(x_{k-1})| < \frac{\epsilon}{b-a}$, pri čemu još dodatno vrijedi $y_k < z_k$ ako je $k \in D'_0$, te $y_k \leq z_k$ ako je $k \in D'_1$. Nadalje, za svaki $k \in D'$ odaberimo dodatnu točku iz intervala $[x_{k-1}, x_k]$ na sljedeći način. Ako je $k \in D'_0$, odaberimo $u_k \in (y_k, z_k)$ tako da je $|u_k - z_k| < \frac{\epsilon}{B|D'|}$ i $|f(u_k) - g(u_k)| < \frac{\epsilon}{b-a}$; ako je $k \in D'_1$, odaberimo $v_k \in (z_k, x_k)$ tako da je $|v_k - z_k| < \frac{\epsilon}{B|D'|}$. Definiramo sljedeće razdiobe:

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \{a, b\}; \\ \rho_1 &= \{y_k \ : \ k \in D \wedge k - 1 \notin D\}; \\ \rho_2 &= \{z_k \ : \ k \in D'_0\} \cup \{v_k \ : \ k \in D'_1\}; \\ \rho_3 &= \{z_k \ : \ k \in D'_1 \wedge z_k \neq y_k\} \cup \{u_k \ : \ k \in D'_0\} \cup \{y_k \ : \ k, k-1 \in D\}; \\ \rho &= \rho_0 \cup \rho_1 \cup \rho_2 \cup \rho_3. \end{aligned}$$

Pokazat ćemo da je $S(f, \rho) - C(f, \rho) < 6\epsilon$.

Za svaki $q \in \rho$, neka je $q' = q$ ako je $q = a$, a inače neka je $q'$ najveći element od $\rho$ strogo manji od $q$. Za $q \in \rho$ označimo

$$E_q \ := \ \big(\sup(f, [q', q]) - f(q)\big)(q - q'),$$

pa je

$$S(f, \rho) - C(f, \rho) \ = \ \sum_{q \in \rho} E_q \ \leq \ \sum_{i=0}^{3} \left( \sum_{q \in \rho_i} E_q \right).$$

Ograničimo sada sume $\sum\limits_{q\in Q_i} E_q$, za sve $0 \leq i \leq 3$.

Prvo primijetimo da ako je $g(x_{n-1}) = g(x_n)$, tada je $\sup(f, [b', b]) = f(b)$ pa je $E_b = 0$. S druge strane, ako je $g(x_{n-1}) > g(x_n)$ tada je $n \in D$ pa je $b' \in [x_{n-1}, b)$ odakle slijedi $E_b < \frac{B\delta}{2}$. Budući da je $E_a = 0$, dobivamo

$$\sum_{q\in\rho_0} E_q \ < \ \frac{B\delta}{2} \ < \ \epsilon.$$

Nadalje, primijetimo da, ako je $q \in \rho_1$ tada je $q' = a$ ili $q' \in \rho_2$. U oba slučaja je $\sup(f, [q', q]) - f(q) < \frac{\epsilon}{b-a}$, i stoga

$$\sum_{q\in\rho_1} E_q \ < \ \epsilon.$$

Ako je $q \in \rho_2$ tada je $q - q' < \frac{\epsilon}{B|D'|}$, a budući da je $|\rho_2| \leq |D'|$, to povlači

$$\sum_{q\in\rho_2} E_q \ < \ B|D'| \cdot \frac{\epsilon}{B|D'|} \ = \ \epsilon.$$

Konačno, neka je $q \in \rho_3$. Ako je $q = z_k \neq y_k$ za neki $k \in D'_1$, tada je $g(q) = f(q)$ i $q' = y_k$ pa je $q - q' < \frac{\delta}{2}$. Ako je $q = u_k$ za neki $k \in D'_0$, tada je $|f(q) - g(q)| < \frac{\epsilon}{b-a}$ i $q' = y_k$ pa je ponovo $q - q' < \frac{\delta}{2}$. Ako je $q = y_k$ za $k, k-1 \in D$, tada

$$g(x_{k-1}) - \frac{\epsilon}{b-a} \ \leq \ f(q) \ \leq \ g(q) \ \leq \ g(x_{k-1})$$

i $q' = y_{k-1}$ pa je $q - q' < \delta$. Dakle, u svim slučajevima je $q - q' < \delta \leq \delta_1$ i $|f(q) - g(q)| < \frac{\epsilon}{b-a}$. Neka je sada $\bar{\rho}$ proizvoljna razdioba od $[a, b]$ koja proširuje $\rho_3 \cup \{q' \ : \ q \in \rho_3\}$, zadovoljava $\|\bar{\rho}\| < \delta_1$, i nema točaka u intervalima $(q', q)$ za $q \in \rho_3$. Tada je

$$\begin{aligned}
\sum_{q\in\rho_3} E_q &= \sum_{q\in\rho_3} \big(\sup(f, [q', q]) - f(q)\big)(q - q') \\
&\leq \sum_{q\in\rho_3} \big(g(q') - f(q)\big)(q - q') \\
&< \epsilon + \sum_{q\in\rho_3} \big(g(q') - g(q)\big)(q - q') \\
&\leq \epsilon + \sum_{q\in\bar{\rho}} \big(g(q') - g(q)\big)(q - q') \\
&= \epsilon + \sum_{q\in\bar{\rho}} g(q')(q - q') - \sum_{q\in\bar{\rho}} g(q)(q - q') \quad < \quad 3\epsilon.
\end{aligned}$$

Uvažimo li sada gornje ograde za sume $\sum\limits_{q\in Q_i} E_q$, za sve $0 \leq i \leq 3$, dobivamo:

$$S(f, \rho) - C(f, \rho) \ = \ \sum_{q\in\rho} E_q \ < \ 6\epsilon,$$

što dokazuje početnu tvrdnju, budući da je $\epsilon$ bio proizvoljan. ∎

**Korolar 8.** *Ako je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ograničena, tada za svaki $\epsilon > 0$ postoji razdioba $\rho$ od $[a, b]$ takva da je*

$$C(f, \rho) - s(f, \rho) < \epsilon.$$

*Dokaz.* Primijenimo Lemu 7 na funkciju $-f$. ∎

**Teorem 9.** *Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ograničena funkcija. Ako je $f$ Cauchy-integrabilna, tada je $f$ Riemann-integrabilna.*

*Dokaz.* Neka je $L$ realan broj iz definicije Cauchy-integrabilnosti od $f$ na $[a, b]$. Neka je $\epsilon > 0$ proizvoljan, i fiksirajmo $\delta > 0$ takav da za sve razdiobe $\rho$ od $[a, b]$ takve da je $\|\rho\| < \delta$, vrijedi $|C(f, \rho) - L| < \epsilon$. Neka je $\rho = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ razdioba od $[a, b]$ takva da je $\|\rho\| < \delta$. Koristeći Lemu 7 i Korolar 8, za svaki $1 \leq k \leq n$ odaberimo razdiobe $\rho_k^S$ i $\rho_k^s$ od $[x_{k-1}, x_k]$ takve da na $[x_{k-1}, x_k]$ vrijedi

$$S(f, \rho_k^S) - C(f, \rho_k^S) \; < \; \frac{\epsilon}{n} \quad \text{i} \quad C(f, \rho_k^s) - s(f, \rho_k^s) \; < \; \frac{\epsilon}{n}.$$

Neka je $\rho^S = \cup_k \rho_k^S$ i $\rho^s = \cup_k \rho_k^s$. Tada je

$$S(f, \rho^S) - C(f, \rho^S) \; < \; \epsilon \quad \text{i} \quad C(f, \rho^s) - s(f, \rho^s) \; < \; \epsilon.$$

Budući da je $\|\rho^S\|, \|\rho^s\| < \delta$, imamo

$$|C(f, \rho^S) - L| \; < \; \epsilon \quad \text{i} \quad |C(f, \rho^s) - L| \; < \; \epsilon.$$

Slijedi

$$S(f, \rho^S) - s(f, \rho^s) \; < \; 4\epsilon.$$

Budući da je $\epsilon$ proizvoljan, odavde lagano slijedi da je $f$ Riemann-integrabilna na $[a, b]$. ∎

*Opaska* 10. Pretpostavka o ograničenosti iz Teorema 9 je očito nužna (vidi Primjedbu 6). Može se pokazati da Cauchyjev integral u slučaju iz Primjedbe 6 zapravo odgovara *nepravom* Riemannovom integralu

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\varepsilon}^{1} x^{-1/2} \, dx.$$

# Bibliografija


[1] A.-L. Cauchy, Résumé des Leçons sur le Calcul Infinitesimal. (1823), p. 81.

[2] D.C. Gillespie. The Cauchy definition of a definite integral, Annals of Mathematics (2) 17 (1915), 61–63.

[3] B. Guljaš, Matematička analiza 1 i 2. skripta, https://web.math.pmf.unizg.hr/~guljas/skripte/MATANALuR.pdf

[4] S. Kurepa. Matematička analiza 1. Tehnička knjiga, Zagreb, 1989.

[5] S. Kurepa, Matematička analiza 2, Tehnička knjiga, Zagreb, 1990.

[6] P. Pandžić, J. Tambača, Integrali funkcija više varijabli, skripta, https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/difraf/predavanja_int.html

[7] S. Schneider. A note on Cauchy integrability. International Mathematical Forum 9 (2014), 1615–1620.

ISSN 1334-6083